Azim Premji University

A publication of Azim Premji University
together with Community Mathematics Centre,
Rishi Valley

पढ़ना गणित

पद्मप्रिया शिराली

एक व्यावहारिक दृष्टिकोण

At Right Angles

A Resource for School Mathematics

गुणा पढ़ाना

यहाँ गुणा को लेकर कुछ सवाल हैं : क्या बच्चे गुणा के टेबिल याद रखते हैं? गुणा दर्शाने के लिए आसान और सुविधाजनक तरीका क्या है? क्या गुणा करने की प्रक्रिया भर पढ़ाना पर्याप्त है? जब हम इन सवालों पर विचार करेंगे तो पाएँगे कि ज्ञान के निमार्ण की आवश्यकता क्यों है। अगर हम देखना चाहते हैं कि बच्चे इस बात को समझें कि तथ्य किस तरह से प्राप्त किए जाते हैं, प्रक्रियाएँ कैसे बनती हैं और अवधारणाएँ कैसे सामने आती हैं तो हमारा तरीका समझदारी भरा होगा।

की–वर्ड : गुणन, जोड़–घटाना, पैर्टन, चक्र, सममिति, विनिमेय, कार्तीय उत्पाद। गुणा से परिचय कराने से पहले हम तैयारी के लिए दो गतिविधियाँ करेंगे (गतिविधि एक व गतिविधि दो)।

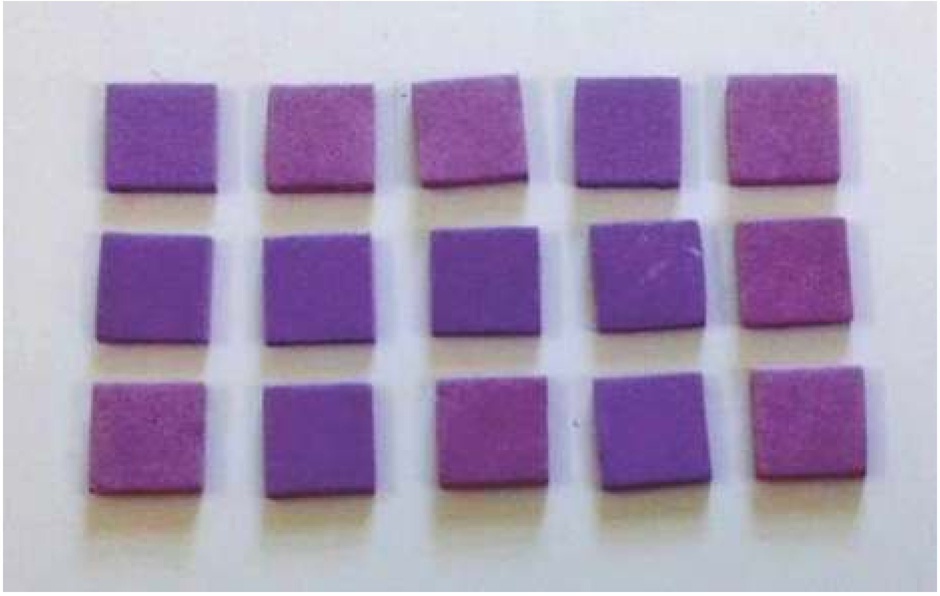
गतिविधि *एक*

चीजों के बराबर–बराबर के समूह बनाना और गुणा के सन्दर्भ को दिमाग में बिठाना

जरूरी सामग्री : चौकोर टुकड़े, नलियाँ व रबर बैण्ड्स, रंगीन बटन, खूँटी पर टाँगने वाला बोर्ड व खूँटियाँ या एक ग्राफ बोर्ड और बीज।

बच्चों का एक समूह नलियों के साथ काम करे और नलियों के ऐसे बण्डल बनाए कि हर बण्डल में बराबर–बराबर नलियाँ हों। दूसरे समूह के बच्चे चौकोर टुकड़ों को पंक्तियों में इस तरह जमाएँ कि हर पंक्ति में टुकड़ों की संख्या बराबर हो। और एक अन्य समूह के बच्चे बीजों को ग्राफ बोर्ड पर या चौकोर खानों वाली शीट्स पर लगा सकते हैं। (बीजों को कागज की प्लेट्स या कटोरों में भी रखा जा सकता है।) सभी समूहों को बारी–बारी से अलग–अलग सामग्री के साथ काम करने का मौका मिलना चाहिए। अलग–अलग बच्चों के सीखने का तरीका अलग–अलग होता है। हमें चाहिए कि हम उन्हें चीजों को देखने के अलग–अलग तरीकों से वाकिफ कराएँ। अलग–अलग सामग्रियों को अलग–अलग तरह से जमाने से बच्चों को ऐसे अलग–अलग सन्दर्भों से परिचित होने में मदद मिलती है जिनमें गुणा की स्थिति उत्पन्न होती है। साथ ही यह भी बहुत जरूरी है कि इस उम्र के बच्चों को स्पर्श के जरिए सीखने के अवसर मिलें। इससे उन्हें समस्या की कल्पना करने में मदद मिलती है और अवधारणा की समझ भी पुख्ता होती है। यह गतिविधियाँ उन बच्चों के लिए भी मददगार साबित होंगी जो क्रियात्मक या प्रायोगिक तरीकों से सीखते हैं।

इस गतिविधि का उद्देश्य चीजों को बराबर समूहों में अलग–अलग तरीके से जमाने और प्रत्येक स्थिति में उत्पन्न दोनों संख्याओं (समूहों की संख्या और प्रत्येक समूह में चीजों की संख्या) को अलग–अलग करके देखने पर ध्यान देना है। यहाँ कुल संख्या पर बात करना जरूरी नहीं है। इसलिए यहाँ पूछे जाने वाले सवाल कुछ इस तरह होने चाहिए : 'कितने समूह हैं?', 'प्रत्येक समूह में कितनी चीजें हैं?'



गतिविधि दो

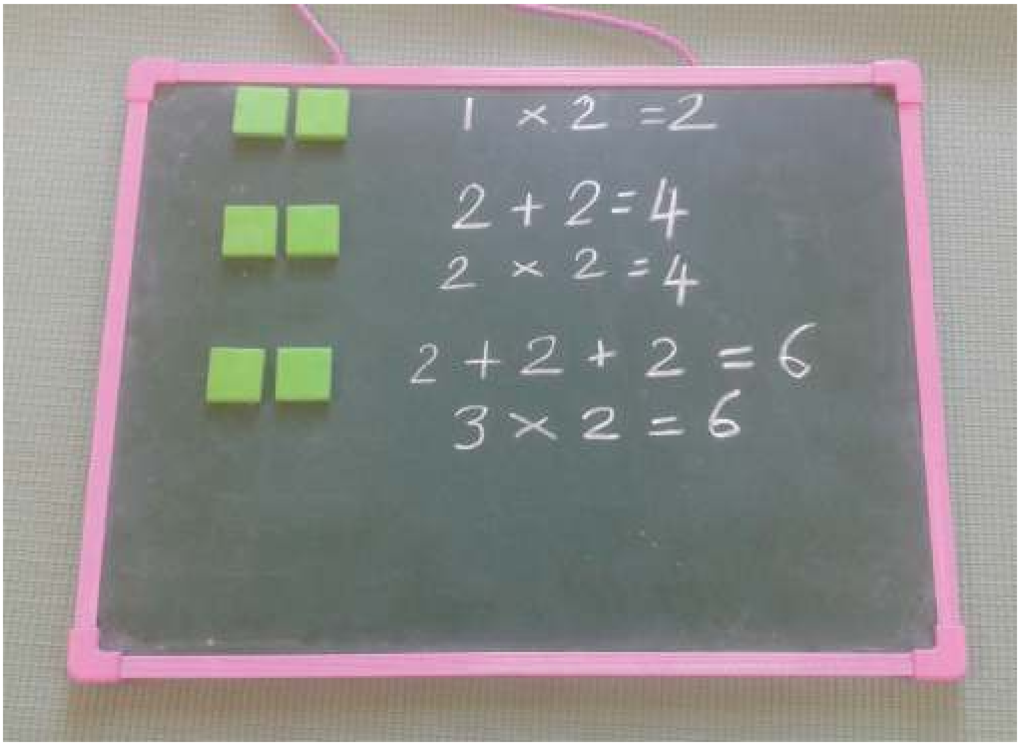
2, 5, 4 व 10 के पदों में स्किप काउंटिंग करना

जरूरी सामग्री : मोतियों की माला, संख्या रेखा व संख्या चार्ट

बच्चे संख्या रेखा की मदद से या संख्या रेखा के बिना भी 2,5,4 व 10 के पदों में स्किप काउंटिंग कर सकते हैं। स्किप काउंटिंग ऐसी गिनती होती है जिसमें 1 के पदों में गिनती नहीं की जाती बल्कि 1 के अतिरिक्त किसी भी संख्या के पदों में गिनती की जाती है। जैसे 2 के पदों में स्किप काउंटिंग का मतलब हुआ कि हर दूसरी संख्या को गिनना जैसे 2,4,6,8 इत्यादि। इसी तरह 3 के पदों में स्किप काउंटिंग हुई 3,6,9,12 इत्यादि। यदि इस तरह गिनती करना बच्चों को आसान लगता हो तो वे दूसरी संख्याओं के साथ भी स्किप काउंटिंग कर सकते हैं। वे उल्टी व सीधी दोनों तरह की गिनती में स्किप काउंटिंग कर सकते हैं।

स्किप काउंटिंग के लिए सवाल कुछ इस तरह के होने चाहिए : 'हम किस संख्या के पदों में गिनती कर रहे हैं?', जवाब होगा 2। '10 तक पहुँचने के लिए हमें 2 के पदों को कितनी बार गिनना होगा?' इसका जवाब होगा : 2 को 5 बार गिनने पर हम 10 तक पहुँचेंगे।

यदि इसे जमीन पर एक संख्या रेखा खींचकर कूदने की गतिविधि के रूप में किया जाए तो यह काफी मजेदार होता है। इस तरह बच्चे खोज सकते हैं कि 2 या 3 या किसी और संख्या के पदों के हिसाब से कूदकर वे 12 तक पहुँच सकते हैं या नहीं।



गतिविधि *तीन*

पुनरावर्ती जोड़ के जरिए 2 के पहाड़े से परिचय कराना

जरूरी सामग्री : बीज और चौकोर टुकड़े

किसी भी पहाड़े से परिचय कराते समय यह बेहद जरूरी है कि एक–एक चरण को स्पष्ट रूप से बताते हुए बच्चों के सामने उस पहाड़े को धीरे–धीरे बनाया जाए।

एक पंक्ति में 2 चौकोर जमाएँ और कहें : ”यह 2 चौकोरों का 1 समूह है।“ (एक बार दो हुआ 2, इसे इस तरह लिखा जाता है 1 x 2 = 2) अब इसके नीचे 2 चौकोर रखें और कहेंः ”यह 2 चौकोरों के 2 समूह हैं।“ (दो बार दो हुए चार, इसे इस तरह लिखा जाता है 2 x 2 = 4) अब 2 और चौकोर रखकर तीसरी पंक्ति बनाओ (तीन बार दो हुए छह, 3 x 2 = 6) और इसी तरह आगे बढ़ते जाएँ जब तक कि दस पंक्तियाँ ना हो जाएँ। दसवीं बार में दो चौकोरों के दस समूह होंगे और इसे लिखेंगे 10 x 2 = 20।

मैं पहाड़ों को इस तरह लिखकर पढ़ाने को प्राथमिकता देती हूँ 1 x 2 = 2, 2 x 2 = 4, 3 x 2 = 6, 4 x 2 = 8 इत्यादि (इस तरीके में पहली संख्या बदलती रहती है और दूसरी संख्या स्थिर रहती है।) यदि हम अपनी बनाई चौकोरों की पंक्तियाँ देखें तो वहाँ हर बार समूहों की संख्या बढ़ती है जबकि समूह का आकार (यानी कि चौकोरों की संख्या) स्थिर रहता है। गुणे की स्थिति के बारे में हम जिस तरह से बात करते हैं यह उसके अनुरूप है। उदाहरण के लिए 10 कुर्सियों की 3 पंक्तियाँ, 20 विद्यार्थियों की 4 कक्षाएँ, 2 किलो नमक के 5 पैकेट आदि।

हालाँकि यदि कोई 2 x 1 = 2, 2 x 2 = 4, 2 x 3 = 6 आदि लिखकर पढ़ाने को प्राथमिकता देता है तो चौकोरों को क्रमिक पंक्तियों में जमाते हुए उन्हें इस तरह कहना होगा : ‘दो का एक बार आना हुआ दो, 2 x 1 = 2’ ‘दो का दो बार आना हुआ चार, 2 x 2 = 4, ‘दो का तीन बार आना हुआ छह, 2 x 3 = 6’ आदि।

चाहे जो भी तरीका अपनाया जाए यह जरूरी है कि जिस संख्या को दोहराया जा रहा है और जितनी बार दोहराया जा रहा है उन दोनों ही संख्याओं को बताते हुए धीरे–धीरे आगे बढ़ा जाए।

बच्चों को अपनी गतिविधियों को चित्रों के रूप में भी दर्ज करने दें (जैसा कि गतिविधि दो के चित्र में दिखाया गया है)। यह जरूरी है कि वे परिणाम को पुनरावर्ती जोड़ व गुणा दोनों के तथ्यों के रूप में तब तक लिखें जब तक कि वे पुनरावर्ती जोड़ व गुणा दोनों के बीच के सम्बन्ध को स्पष्ट रूप से समझ न लें।

‘इनटू’ का इस्तेमाल : किन्हीं कारणोंवश पहाड़ों को याद करते हुए ‘इनटू’ शब्द का प्रयोग हमारी भाषा में काफी बढ़ गया है। (”टू इनटू फोर इक्वल एट“) लेकिन यह ठीक नहीं है। वास्तव में जब कोई पूछता है, ”हाऊ मैनी टाइम्स डस टू गो इनटू फोर?“ तो इसका असल मतलब होता है भाग करना (यानी 4 भाग 2) और इसका जवाब होता है 2। हमें इस अभ्यास को बदलने की जरूरत है और गुणात्मक तथ्यों को ”तीन गुना दो बराबर छह“, ”4 गुना 8 बराबर 32“ आदि पढ़ने की जरूरत है।

5, 4 व 3 (मैं शुरुआत में 2 व 5 के पहाड़े को पढ़ाने को प्राथमिकता देती हूँ।) के पहाड़ों से भी बच्चों का परिचय इसी तरह कराया जा सकता है। अच्छा होगा कि यहाँ तक पहुँचकर थोड़ा ठहरें और इस तरह के तथ्यों को समझाने में समय लगाएँ फिर आगे के पहाड़ों की ओर बढ़ें।

गतिविधि
चार

पहाड़ों को याद करने के लिए 2, 3, 4 व 5 के पहाड़ों के पैटर्न को सहायक सामग्री के रूप में देखना

जरूरी सामग्री : पहाड़ों की सारणियाँ जिसमें संख्याएँ बड़े–बड़े अक्षरों में स्पष्ट रूप से लिखी हों, 1 से 100 तक का संख्या चार्ट

5 के पहाड़े में दिख रहे पैटर्न पर बच्चों के साथ चर्चा करें। सबसे पहले वे इकाई के स्थान के अंक पर ध्यान देकर यह देख सकते हैं कि इकाई के स्थान पर 2–2 के क्रम में 5 व 0 का दोहराव होता है। एक बार इकाई के स्थान पर 5 फिर 0, फिर 5 फिर 0। वे यह भी देख सकेंगे कि दहाई के स्थान पर हर संख्या दो बार आती है।

इसके बाद वे 2 के पहाड़े के पैटर्न को देख सकते हैं। वे देखेंगे कि अंक 2, 4, 6, 8 व 0 का 5 के क्रम में दोहराव होता है। यानी कि हर पाँचवीं संख्या में इन अंकों का दोहराव होता है। लेकिन दहाई के स्थान का पैटर्न तभी स्थापित किया जा सकता है जबकि पहाड़े को आगे बढ़ाकर देखा जाए। यह एक अच्छा मौका है पहाड़े को 10 की संख्या से आगे बढ़ाकर दिखाने का (जो कि हम आमतौर पर नहीं करते)।

अब वे 4 के पहाड़े के पैटर्न पर काम कर सकते हैं। वे देखेंगे कि इकाई के स्थान पर अंक 4, 8, 2, 6 व 0 का 5 के क्रम में दोहराव होता है। और दहाई का पैटर्न देखने के लिए क्या करें? क्या इसे देखने के लिए हमें पहाड़े को आगे बढ़ाने की जरूरत है? क्या 4 के पहाड़े में इकाई के स्थान पर आने वाले अंकों के क्रम और 2 के पहाड़े में इकाई के स्थान पर आने वाले अंकों के क्रम में किसी तरह का कोई सम्बन्ध है?

और अन्त में वे 3 के पहाड़े का पैटर्न देखें। यदि हम इकाई के स्थान पर आने वाले अंकों के तीन–तीन के समूह बनाएँ और उन्हें इस प्रकार पंक्तियों में लिखें तो पैटर्न को आसानी से देखा जा सकता है :

3	6	9
2	5	8
1	4	7

बच्चे देख सकेंगे कि पहले, दूसरे व तीसरे कॉलम के अंक हर बार 1–1 करके घटते हैं।

क्या पहाड़ों को याद करना चाहिए?

एक : बच्चों को गुणा की अवधारणा को समझने और पूरी तरह दिमाग में बिठाने के लिए भरपूर अवसर मिलने चाहिए।

दो : बच्चों को समझ के साथ पहाड़ों को बनाना आना चाहिए।

तीन : 2 से 10 तक के पहाड़ों को याद करने व सीखने में दृश्य व श्रव्य याददाश्त का इस्तेमाल करना दिमागी अंकगणित के लिए बहुत उपयोगी होता है और इससे समय की भी बहुत बचत होती है।

पहाड़ों को पढ़ने के लिए धुनें भी बनाई गई हैं। यह बाजार में और गानों के रूप में इंटरनेट पर भी उपलब्ध हैं। जिन बच्चों का संगीत की ओर झुकाव हो उनके लिए यह काफी मददगार साबित होगा।

अधिकांश शिक्षक या तो पहले दो चरणों को छोड़ देते हैं या फिर इन्हें जल्दी–जल्दी निपटाने का प्रयास करते हैं और इस स्थिति में बच्चों को पहाड़े याद करना पड़ता है। इससे बच्चे अवधारणा को समझ नहीं पाते और यदि वे याद किया हुआ भूल जाएँ तो उनके पास और कोई विकल्प नहीं होता। वे लाचार हो जाते हैं। पहाड़े बनाने की क्षमता बच्चों को समर्थ बनाती है।

यदि कोई बच्चा पहाड़ों को याद करने में ज्यादा समय लेता है तो भी घबराने की जरूरत नहीं है। हम चाहते हैं कि बच्चे गणितीय ढंग से सोचें न कि सिर्फ रट–रटकर सीखें। इसलिए उचित यही होगा कि इस अवधारणा को ठीक तरह से समझने पर ज्यादा ध्यान दिया जाए।

गतिविधि *पाँच*

6 से 10 तक के पहाड़े बनाना

जरूरी सामग्री : झाड़ू की डण्डियाँ या गत्ते की पट्टियाँ या प्लास्टिक के टंग क्लीनर (जीभ साफ करने वाले)

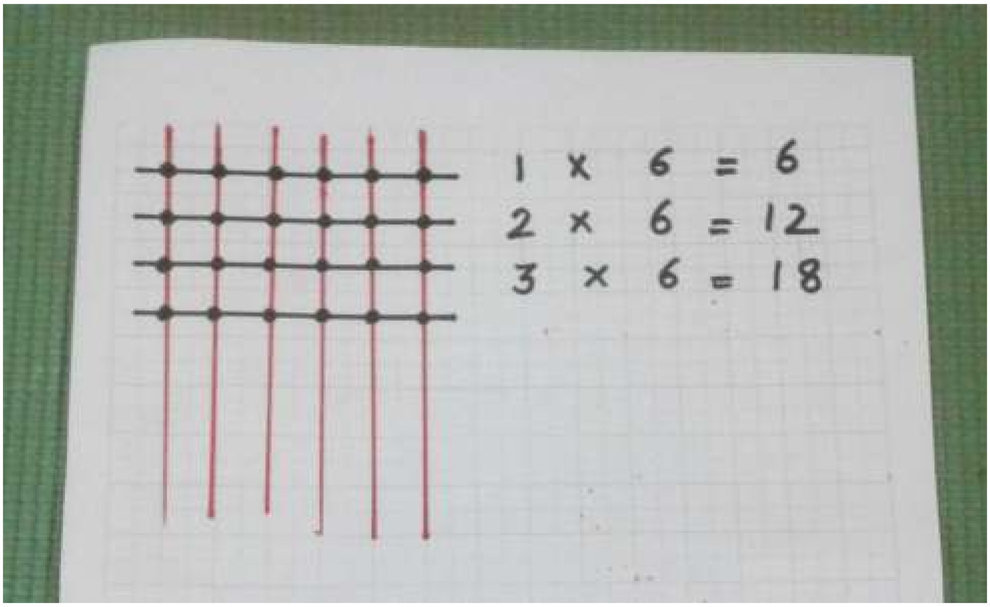
6,7,8 और 9 के लिए गुणात्मक तथ्य नीचे लिखी किसी भी एक विधि द्वारा सिखाए जा सकते हैं।

- बीज या बटनों का इस्तेमाल कर पुनरावर्ती जोड़ द्वारा
- चौकोर टुकड़ों को पंक्तियों व स्तम्भों में जमाकर
- एक–दूसरे को काटती हुई रेखाओं के कटान बिन्दुओं को गिनकर

बड़ी संख्याओं के लिए पहाड़े बनाते समय तीसरी विधि को इस्तेमाल करने का फायदा यह है कि यह बाकी दोनों विधियों के मुकाबले काफी आसान है। बच्चे अपनी–अपनी नोटबुक में बेहद आसानी से इस विधि के लिए चित्र भी बना सकते हैं।

6 पट्टियों को एक–दूसरे के समानान्तर लम्बवत् (खड़े में) जमाएँ। फिर एक पट्टी को इन पट्टियों पर आड़ा करके रखें। उन बिन्दुओं पर बच्चों का ध्यान दिलाएँ जहाँ आड़ी पट्टी खड़ी पट्टी को काट रही है और कहें 1 x 6 =6। अब एक और पट्टी को खड़ी पट्टियों पर आड़ा रखें और कटान बिन्दुओं की ओर बच्चों का ध्यान दिलाएँ व कहें 2 x 6 =12। अब फिर एक और पट्टी को खड़ी पट्टियों पर आड़ा रखें और कटान बिन्दुओं की ओर बच्चों का ध्यान दिलाएँ व कहें 3 x 6 =18 इत्यादि।

एक बार बच्चे इस प्रक्रिया को समझ जाएँ जिसके जरिए उन्होंने 6 का पहाड़ा बनाया है तो वे 7, 8 व 9 के लिए इसी प्रक्रिया का इस्तेमाल कर खुद–ब–खुद गुणा के तथ्य निकाल सकेंगे।



गतिविधि छह

6,7,8,9 व 10 के पहाड़ों के पैटर्न पर ध्यान देना और इन्हें याद करने के लिए इस पैटर्न को सहायक सामग्री की तरह इस्तेमाल करना।

जरूरी सामग्री : पहाड़ों का चार्ट जिसमें संख्याएँ बड़े अक्षरों में स्पष्ट रूप से लिखी गई हों, 1 से 100 तक का संख्या चार्ट

10 के पहाड़े का पैटर्न तो एकदम स्पष्ट है।

बच्चों को 9 के पहाड़े में जो भी पैटर्न दिखाई देते हैं उन पैटर्नों पर बच्चों के साथ चर्चा करें। 9 के पहाड़े में बहुत–से पैटर्न होते हैं और यदि शिक्षक कुछ मार्गदर्शी सवाल पूछें तो बच्चे इनमें से ज्यादातर पैटर्नों को खुद ब खुद खोज पाएँगे। सबसे पहले वे इकाई के स्थान की संख्या को देख सकते हैं कि यह 9 से शुरू होकर कम होते–होते 0 तक जाती है। और दहाई के स्थान की



9 x 4=36 को दर्शाता उँगलियों का पैटर्न



9 x 5=45 को दर्शाता उँगलियों का पैटर्न

संख्या 1 से लेकर 9 तक बढ़ती जाती है। पहाड़े में आने वाली हर संख्या के अंकों का योग 9 होता है। इकाई के स्थान के अंकों में 10 के क्रम में दोहराव होता है। पहाड़े को दोनों हाथों की उँगलियों का इस्तेमाल कर आसानी से दर्शाया जा सकता है। पहले एक उँगली को उठाकर, फिर दूसरी इत्यादि और दहाई की संख्या को बाईं ओर की उठाई हुई उँगलियों से और इकाई की संख्या को दाईं ओर की उठाई उँगलियों की संख्या से पढ़ा जा सकता है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।

अब वे 8 के पहाड़े के पैटर्न को देख सकते हैं। वे देखेंगे कि इकाई के स्थान पर 8, 6, 4, 2, 0 का 5 के क्रम में दोहराव होता है। लेकिन दहाई के स्थान का पैटर्न तब तक स्थापित नहीं किया जा सकता जब तक कि पहाड़े को आगे न बढ़ाया जाए। क्या 4 के पहाड़े में इकाई के स्थान पर आने वाले अंकों के क्रम व 8 के पहाड़े में इकाई के स्थान पर आने वाले अंकों के क्रम में कोई सम्बन्ध है?

अब वे 6 के पहाड़े के पैटर्न पर काम कर सकते हैं। वे देखेंगे कि इकाई के स्थान पर संख्या 6,2,8,4,0 का 5 के क्रम में दोहराव होता है। दहाई के स्थान के पैटर्न का क्या? क्या इस पैटर्न को खोजने के लिए हमें पहाड़े को आगे बढ़ाने की जरूरत पड़ेगी?

और अन्त में वे 7 के पहाड़े के पैटर्न को देख सकते हैं। 7 के पहाड़े को पैटर्न को आसानी से देखा जा सकता है यदि हम इकाई के स्थान पर आने वाले अंकों के तीन–तीन के समूह बनाएँ और इन्हें एक के नीचे एक पंक्ति दर पंक्ति लिखें (जैसा कि हमने 3 के पहाड़े का पैटर्न देखने के लिए किया था)

7	4	1
8	5	2
9	6	3

पहले, दूसरे व तीसरे कॉलम के अंक हर स्तर पर 1–1– करके बढ़ते दिखाई देते हैं।

गतिविधि *सात*

2,3,4,5,6,7,8,9 के गुणजों का इस्तेमाल करके दृश्य पैटर्न बनाना

जरूरी सामग्री : चौकोर खानों वाले कागज, हर बच्चे के लिए इस कागज की ऐसी 8 शीट्स

बच्चों से 10 x 10 की चौकोर खानों वाली एक जाली में 1 से 100 तक की संख्याएँ लिखने को कहें।



उन्हें कहें कि अपनी–अपनी जाली में 2 के गुणजों को पेंसिल से रंग कर लें और जो पैटर्न उभर रहा है उसे ध्यान से देखें।

अब 10 x 10 की एक दूसरी जाली पर दुबारा 1 से 100 तक की संख्याएँ लिखने को कहें और इस बार 3 के गुणजों को पेंसिल से रंग करने को कहें। 3 के पहाड़े में एक तिरछा पैटर्न बनता है।

इस अभ्यास को वह अलग–अलग चौकोर जालियों पर 4 से लेकर 9 तक की अन्य सभी संख्याओं के लिए दोहरा सकते हैं।

जो भी पैटर्न उभरते हैं उन पर चर्चा करें।

गतिविधि *आठ*

गुणा के क्रम विनिमयता, साहचर्यता और वितरण गुणधर्मों को खोजना

जरूरी सामग्री : चौकोर जाली वाले कागज, गत्ते की पट्टियाँ

बच्चों के साथ मिलकर गुणा के इन तीन गुणधर्मों को खोजते हुए हम छोटे बच्चों को इनका नाम बताए बिना केवल इन गुणधर्मों को दिखा सकते हैं।

क्रम विनिमयता

बच्चों से 3–3 बीजों के 5 समूह बनाने को कहें। उनसे पूछें इस तरह उन्हें क्या संख्या प्राप्त होती है। अपने उत्तर को लिखने को कहें 5 x 3=15।

अब उन्हें 5–5 बीजों के 3 समूह दिखाएँ। उनसे पूछें कि अब क्या संख्या प्राप्त होती है। उत्तर को लिखने को कहें 3 x 5=15 ।



उनसे पूछें : "क्या 5–5 चीजों के 3 समूह और 3–3 चीजों के 5 समूह बराबर हैं?" दोनों में समान क्या है? उत्तर में प्राप्त होने वाली संख्या समान है।

बच्चों से 6 चौकोरों की एक पंक्ति को रंग करने को कहें। उनसे कहें कि ऐसी 3 पंक्तियाँ बनाएँ। अब वे रंग किए हुए चौकोरों की संख्या को लिख लें।

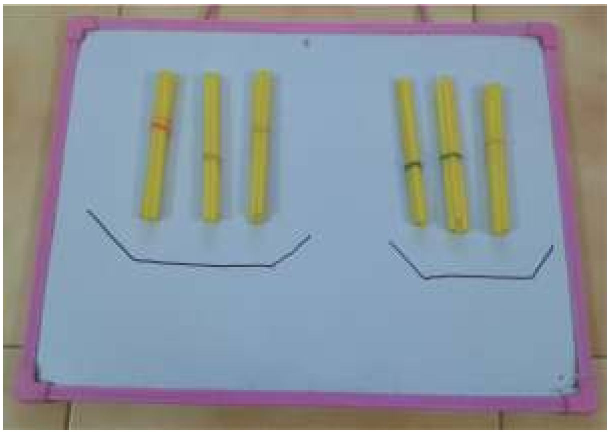
6 चौकोरों की 3 पंक्तियाँ बराबर 18, यानी कि 3 x 6=18

अब उनसे कहें कि रंगीन चौकोर वाले इस कागज को समकोण से मोड़ लें ताकि अब वे कागज को खड़ी स्थिति में देख सकें। उनसे पूछें कि अब उन्हें कितनी पंक्तियाँ दिख रही हैं।

अब उन्हें 3 चौकोरों की 6 पंक्तियाँ दिखाई देती हैं। इसलिए 3 x 6=18

अब इस बात की ओर उनका ध्यान खींचें कि 3 x 6 और 6 x 3 करने पर एक ही उत्तर प्राप्त होता है।

साहचर्यता



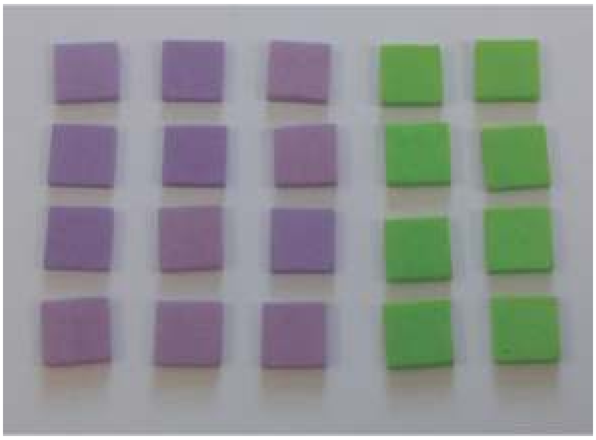
बच्चों से कहें कि रबर बैण्ड से बाँधकर 4–4 नलियों के 6 बण्डल बना लें। इन बण्डलों को बराबर–बराबर संख्या में दो अलग–अलग प्लेटों में रखें (यानी कि हर प्लेट में 3 बण्डल)। अब उनसे नलियों की कुल संख्या बताने को कहें।

हमारे पास 2 प्लेटें, 3 बण्डल और हर बण्डल में 4 नलियाँ हैं।

नलियों की कुल संख्या की गिनती दो तरीके से की जा सकती है। बण्डलों की संख्या गुणा हर बण्डल में नलियों की संख्या यानी कि (2 x 3) x 4 या फिर प्लेटों की संख्या गुणा प्रत्येक प्लेट में नलियों की संख्या यानी कि 2 x (3 x 4)। इसलिए (2 x 3) x 4= 2 x (3 x 4)

वितरण

चित्र में दिखाए तरीके से बच्चों को चौकोरों को रंग करने को कहें। उन्हें बैंगनी रंग के चौकोरों (3 चौकोरों की 4 पंक्तियाँ, 4 x 3=12) व हरे रंग के चौकोरों (2 चौकोरों वाली 4 पंक्तियाँ, 4 x 2=8) के लिए गुणात्मक तथ्य बताने को कहें।



अब उन्हें पूरे क्षेत्र के लिए गुणात्मक तथ्य बताने को कहें : 5 चौकोरों की 4 पंक्तियाँ, 4 x 5=20।

इसलिए (4 x 3) + (4 x 2) = 4 x (3+2) = 4 x 5 = 20।

तीनों नियमों को समझाने के लिए अलग–अलग सन्दर्भों व संख्याओं का इस्तेमाल करते हुए हर नियम के लिए कई सारे उदाहरण दिए जाने चाहिए।

गतिविधि नौ

इबारत वाले सवाल और दिए गए गुणात्मक तथ्यों के लिए कहानी बनाना

जरूरी सामग्री : चौकोर जाली वाले कागज, सादे कागज, बिन्दुओं वाले कागज, बीज

गुणे के अलग–अलग सभी सन्दर्भों का इस्तेमाल करें।

बराबर समूह : 4 कटोरे हैं, हर कटोरे में 5 सेब हैं तो कुल कितने सेब हुए?

दर : हर बच्चे को 2 पेंसिलों की जरूरत है तो 24 बच्चों के लिए कितनी पेंसिलें चाहिए?

श्रेणियाँ : 3 पंक्तियाँ हैं और हर पंक्ति में 4 पौधे हैं तो कितने पौधे हुए?

नाप–तौल : एक लड़के के पास 4 किताबें हैं, उसके भाई के पास उससे 3 गुना किताबें हैं तो उसके भाई के पास कितनी किताबें हुईं?

कार्तिय गुणन : एक लड़के के पास 3 टीशर्ट हैं (लाल, पीली, सफेद) और निक्कर हैं (नीली व काली)। इनके जोड़े बनाकर पहनने के कितने तरीके हो सकते हैं?

- एक माली ने हर क्यारी में 9 पौधे लगाए। हर बगीचे में 4 क्यारियाँ हैं तो कितने पौधे हुए?
- शुरुआती स्तर पर बच्चों को इस सवाल को हल करने के लिए नमूनों के तौर पर बीजों या फिर बीजों और क्यारियों को दर्शाने के लिए बिन्दुओं वाले कागज का इस्तेमाल करने दें।
- रसोई की एक दीवाल पर टाइल्स लगाई जानी हैं। यदि हर पंक्ति में 8 टाइल्स हों और मिस्त्री के हिसाब से ऐसी 7 पंक्तियाँ बनाई जानी हों तो कितनी टाइल्स की जरूरत पड़ेगी?
- इसके लिए बच्चे चौकोर टुकड़ों या चौकोर जाली वाले कागज का इस्तेमाल नमूनों के तौर पर कर सकते हैं।
- एक गली के शुरू से लेकर आखिर तक 5–5 मीटर की दूरी पर पेड़ लगाए गए हैं। यदि गली में 8 पेड़ लगे हैं तो गली की लम्बाई कितनी होगी?
- इस स्थिति को दिखाने के लिए बच्चे संख्या रेखा का इस्तेमाल कर सकते हैं और इसकी मदद से जवाब पता कर सकते हैं।

बहुत से बच्चों को इबारत वाले सवालों को समझने में कठिनाई होती है। यह कठिनाई आगे की कक्षाओं में भी जारी रहती है जब उन्हें रेखीय समीकरण या प्रतिशत के इस्तेमाल वाले इबारत के सवाल हल करने होते हैं। इबारत वाले सवालों को हल करने के लिए मॉडलिंग तकनीक (नमूनों का इस्तेमाल करके पढ़ाने की तकनीक) के जरिए पढ़ाना पाठ्यपुस्तकों व अधिकांश शिक्षकों द्वारा नकारा जाता है। पढ़ाते समय सवालों का परिचय सन्दर्भ के साथ कराया जाना चाहिए और हमें बच्चों को विभिन्न मॉडलिंग तकनीकों से परिचित करवाना चाहिए। नाप–तौल वाले सवालों को वे ग्राफ पर दर्शा सकते हैं। कार्तिय गुणन वाले सवालों के लिए वे ट्री डायग्राम या एक नेटवर्क बना सकते हैं।

गुणात्मक तथ्यों के लिए कहानी लिखना

6 x 5=30 इस गुणात्मक तथ्य के लिए बच्चों को एक कहानी लिखने को कहें। इससे उनकी समझ या गलत धारणा का पता चल सकेगा। मैंने देखा है कि यह अभ्यास हमेशा ही बच्चों की समझ की वास्तविक स्थिति से वाकिफ कराता है। इससे मुझे अपनी शिक्षण पद्धति को सुधारने का मौका मिलता है। जिस भी तरह का सन्दर्भ वे इस्तेमाल करते हैं उससे हमें अपने द्वारा इस्तेमाल किए गए उदाहरणों पर फीडबैक भी मिलता है।

गतिविधि
दस

1 और 0 से गुणा

जरूरी सामग्री : छड़ियाँ या नलियाँ

बच्चों को यह कैसे बताएँ कि n x 1 = n और n x 0 = 0 ?

इस सवाल का विश्वसनीय जवाब देना आसान नहीं होता। यदि जवाब के तौर पर बार–बार एक ही व्याख्या को दोहराया जाए तो यह एक तरह से कहने पर जोर देना होगा कि 2 बार 2 आया तो हुआ 4 (2गुणा 2=4) और 1 बार 2 आया तो हुआ 2 (1 गुणा 2= 2)। लेकिन इस स्थिति में यह कैसे बताएँगे कि 0 गुणा 2 कितना होगा?

एक तरीका है छड़ियों का उपयोग करना और जोड़ वाले बिन्दुओं को गिनकर उल्टी दिशा में फ्लो तकनीक का इस्तेमाल करना।

हम छड़ियों का इस्तेमाल करके 5 x 2 को दर्शाते हैं और फिर बारी–बारी से एक–एक छड़ी को हटाते जाते हैं और हर बार जोड़ वाले बिन्दुओं की संख्या को गिनते हैं : 5 x 2 (10 जोड़ वाले बिन्दु), 4 x 2 (8 जोड़ वाले बिन्दु), 3 x 2 (6 जोड़ वाले बिन्दु), 2 x 2 (4 जोड़ वाले बिन्दु), 1 x 2 (2 जोड़ वाले बिन्दु), 0 x 2 (0 जोड़ वाले बिन्दु)। यह बहुत जरूरी है कि हम हर चरण के साथ लगातार व्याख्या भी करते जाएँ और हमारी व्याख्या पैटर्न के अनुसार और तार्किक हो।

अवधारणा की समझ और प्रक्रिया की समझ

अक्सर शिक्षकों को अवधारणाओं व प्रक्रियाओं को लेकर एक तरह की कशमकश रहती है। वे इस बात को लेकर आश्वस्त नहीं होते कि उन्हें इन दोनों में से किसी एक पर फोकस करना चाहिए या दोनों पर। कुछ ऐसे होते हैं जो सोचते हैं कि प्रक्रियाएँ ज्यादा महत्त्वपूर्ण होती हैं क्योंकि यह सवालों को हल करने में मदद करती हैं (निश्चित रूप से ऐसा सोचने वाले शिक्षकों की संख्या भारत में अधिक है)। बहुत–सी तकनीकें और शार्टकट्स सिखाए जाते हैं। कुछ शिक्षकों को लगता है कि आजकल प्रक्रिया का ध्यान रखने के लिए केल्कुलेटर और कम्प्युटर जैसे तमाम यंत्र हैं इसलिए उन्हें केवल अवधारणा की समझ पर ध्यान देने की जरूरत है। हालाँकि प्रक्रियाएँ हमारे द्वारा पूर्व में किए गए शोधों की विधियों का परिणाम हैं और यदि शिक्षक व बच्चे प्रक्रियाओं के पीछे के तर्क को समझ लेते हैं तो यह अवधारणाओं की समझ व प्रक्रियाओं के मूल्यांकन दोनों की ही ओर ध्यान दिलाता है। इसलिए हमें प्रक्रिया और अवधारणा को या तो यह या वह वाली स्थिति नहीं मानना चाहिए।

प्रक्रियाएँ अवधारणाओं को पढ़ाने के लिए उपयुक्त होती हैं। बच्चों को गुणा के वैचारिक तंत्र को समझने की जरूरत है जिसमें प्रक्रिया पूरी तरह एकीकृत होती है। प्रक्रियाओं को समझना, करना और उनका सामान्यीकरण करना हर स्तर पर काबिल - ऐ - तारीफ हो सकता है और दिमाग को गणितीय गतिविधियाँ करने के लिए मजबूत बनाता है।

गतिविधि *ग्यारह*

दो अंकों वाली संख्या से एक अंक वाली संख्या का गुणा

जरूरी सामग्री : स्थानीय मान किट

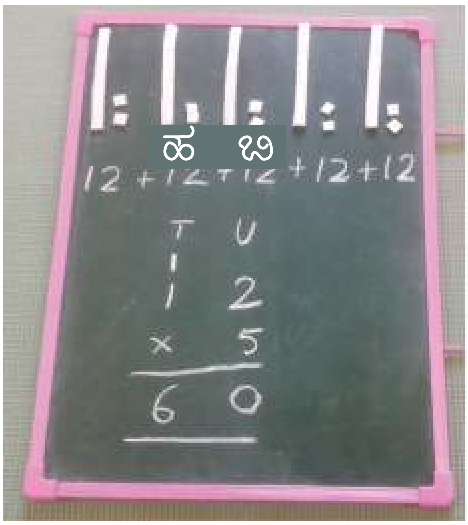
दो अंकों वाली संख्या से एक अंक वाली संख्या के गुणा का परिचय सबसे अच्छी तरह स्थानीय मान की सामग्री का इस्तेमाल करके किया जा सकता है। यह बेहद जरूरी है कि सभी संक्रियाओं को पढ़ाते हुए स्थानीय मान के पहलू पर लगातार जोर दिया जाए क्योंकि किसी भी सवाल को हल करने के लिए जरूरी प्रक्रियात्मक ज्ञान इसी से निर्धारित होता है। उदाहरण के लिए यदि सवाल है 32 x 8 तो जब हम इकाई के स्थान के अंक (यहाँ 2) को 8 से गुणा करते हैं और हासिल के 1 को दहाई के स्थान की संख्या (यहाँ 3) के ऊपर लिखते हैं तो इस 1 का मतलब होता है '1 दहाई'। अगले चरण में जब हम 3 को 8 से गुणा करते हैं तो असल में हम 3 दहाई (यानी कि 30) को 8 से गुणा कर रहे होते हैं। इस सबका मतलब केवल तभी समझ आ पाता है जब हम स्थानीय मान सामग्री का इस्तेमाल करें और संक्रिया के हर चरण में आने वाली संख्या के स्थानीय मान पर जोर दें।

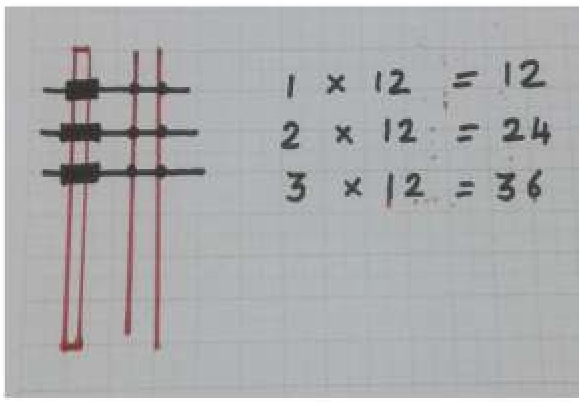
शुरुआत में ऐसे उदाहरण लेना चाहिए जिनमें इकाइयों को दहाइयों में बदलने की जरूरत न हो जैसे : 12 x 4या 13 x 3 इत्यादि और स्थानीय मान सामग्री का इस्तेमाल करना चाहिए।

अगले स्तर पर स्थानीय मान सामग्री के जरिए 12 x 5 जैसे उदाहरणों को दर्शाना चाहिए। बेहतर समझ के लिए बीच के चरणों को दर्शाते हुए इसे प्रक्रिया से जोड़ें।

स्थानीय मान पर फोकस करते हुए दर्शाएँ कि 12 x 5 = (10+2) 5=10 x 5+2 x 5

इसे दहाई के लिए मोटी पट्टियाँ व इकाई के लिए पतली पट्टियाँ इस्तेमाल करके और इनके संगत जोड़ बिन्दुओं को इकाई व दहाई की तरह गिनकर (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) भी दर्शाया जा सकता है।





विस्तार : तीन अंकों वाली संख्या से 1 अंक वाली संख्या का गुणा सैकड़े, दहाई व इकाई की सामग्री इस्तेमाल करके दिखाया जा सकता है। यहाँ भी शुरुआत बिना अदली–बदली की जरूरत वाले सवालों से करनी चाहिए। फिर दहाई को सैकड़े में बदलने वाले सवाल लेने चाहिए और अन्त में ऐसे सवाल जहाँ सैकड़े के स्थान पर अदला–बदली की जरूरत हो।

इसे विस्तारित रूप के जरिए भी दिखाया जा सकता है: 324 x 7 = (300 x 7) + (20 x 7) + (4 x 7)।

गतिविधि *बारह*

10 व 10 के गुणजों द्वारा गुणा

10 से गुणा करना बच्चों के लिए काफी आसान होता है।

10 के गुणजों द्वारा गुणा करने में साहचर्यता के गुण का इस्तेमाल शामिल होता है और इसलिए इसे ध्यानपूर्वक पढ़ाने की जरूरत होती है। जब हमें किसी संख्या को 20 से गुणा करना होता है तो हम ऐसा दो चरणों में करते हैं। हम 20 को 2 x 10 की तरह देखते हैं और पहले उस संख्या को 2 से गुणा करते हैं और फिर 10 से। कभी–कभी शिक्षक भाषा का गलत इस्तेमाल करते हैं और कहते हैं, "पहले 2 से गुणा करो और फिर उत्तर में शून्य जोड़ दो।" इसकी बजाए यह कहना बेहतर होगा, "उत्तर के बगल में एक शून्य लगा दो।"

गतिविधि *तेरह*

गुणात्मक तथ्यों का इस्तेमाल करके नए तथ्य निकालना

जरूरी सामग्री : स्थानीय मान किट

बच्चों को मनगणित करने और गुणा करने के कुशल तरीके खोजने के लिए प्रेरित करें।

जब बच्चे गुणा के तीनों गुणधर्मों से अच्छी तरह वाकिफ हो जाएँ तो वे गुणा के सवालों को आसान तरीके से हल करने में इन्हें इस्तेमाल कर पाएँगे। उदाहरण के लिए :

4 x 8 x 25 को हल करने के लिए वे पहले 4 x 25 कर सकते हैं ताकि उत्तर 100 मिले और फिर 8 को 100 से गुणा कर सकते हैं।

7 x 35 को हल करने के लिए वे पहले 7 x 30=210 कर सकते हैं और फिर 7 x 5 = 35 और फिर दोनों जवाबों 210 और 35 को जोड़कर 245 पा सकते हैं।

वे 'आधा या दुगुना' करने की तकनीक भी इस्तेमाल कर सकते हैं। जैसे 16 x 4 को हल करने के लिए वे 8 (16 का आधा) को 8 (4 का दुगुना) से गुणा कर सकते हैं।

वे 'पूर्णन और घटाने' की तकनीक भी इस्तेमाल कर सकते हैं। जैसे 28 x 5 को हल करने के लिए वे (30–2) x 5 = 30 x 5–2 x 5 = 150–10 = 140

गतिविधि चौदह

दो अंकों वाली संख्या का दो अंकों वाली संख्या से गुणा

दो अंकों वाली संख्याओं के गुणा की प्रक्रिया को समझने में बच्चों को काफी कठिनाई होती है और इस तरह के गुणा के सवालों में उनसे काफी गलतियाँ होती हैं। इस समस्या की एक मुख्य वजह अवधारणा और प्रक्रिया के पीछे के तर्क पर पर्याप्त ध्यान न देकर केवल यांत्रिक रूप से प्रक्रिया लागू करने पर ध्यान देना होता है।

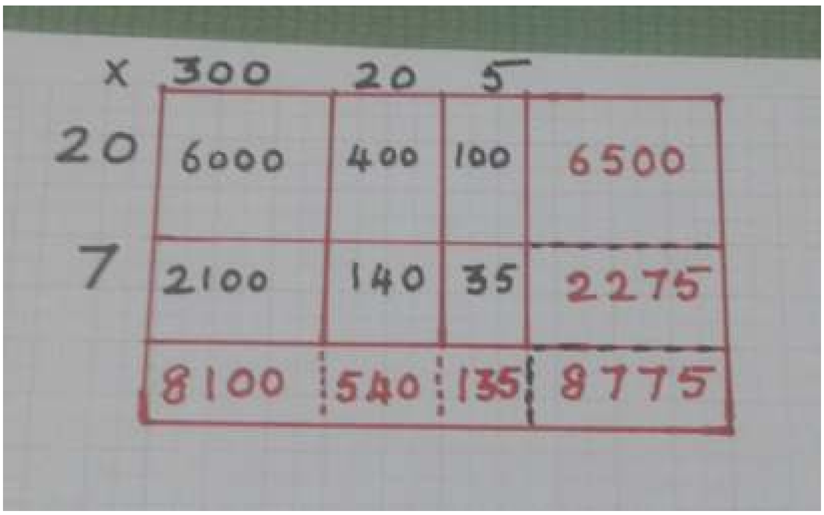
दो अंकों वाली संख्या के गुणा में वितरण गुणधर्म, स्थानीय मान और एक स्थान धारक के रूप में शून्य का इस्तेमाल शामिल होता है। जब हम 24 x 32 सवाल को हल करते हैं तो शुरुआत में हमें इसे विस्तारित रूप में लिखकर दर्शाना चाहिए जैसे 24 x 30+24 x 2।

बाद में 24 x 30 को 24 x 3 x 10 की तरह भी देखा जा सकता है जो कि 72 दहाइयाँ (यानी कि 720) हुआ और 24 x 2 = 48। बार–बार उन अंकों के स्थानीय मान पर बच्चों का ध्यान खींचने की जरूरत है जिसके साथ गुणा किया जा रहा है।

दहाई के स्थान की संख्या के साथ गुणा करते समय शुरू में ही इकाई के स्थान पर शून्य लिख देना चाहिए। इस स्थान को खाली छोड़ने या यहाँ पर सितारे जैसा कोई चिन्ह बनाने या क्रॉस लगाने का कोई मतलब नहीं होता, न ही इससे यह समझने में मदद मिलती है कि यहाँ हो क्या रहा है।

तीन अंकों वाली संख्या का दो अंकों वाली संख्या से गुणा विस्तारित रूप में दर्शाकर और आंशिक गुणा के जरिए दर्शाया जा सकता है।

उदाहरण 325 x 27



विस्तार : इसी तरह जब हम किसी संख्या को तीन अंकों वाली संख्या से गुणा करते हैं तो हमें इस बात की ओर बच्चों का ध्यान जरूर खींचना चाहिए कि सैकड़े के स्थान की संख्या से गुणा करने पर इकाई व दहाई के स्थान पर शून्य आएगा।



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली ऋषिवैली स्कूल, आन्ध्रप्रदेश के कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेन्टर में 1983 से कार्यरत हैं। वे गणित, कम्प्युटर, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण विज्ञान तथा तेलुगु भाषा का अध्यापन करती रहीं हैं। आजकल वे आउटरीच कार्यक्रम के तहत एस. सी. ई. आर. टी., आन्ध्रप्रदेश के साथ उनके पाठ्यक्रम सुधार तथा प्राथमिक स्तर की गणित पाठ्यपुस्तकों के निमार्ण में संलग्न हैं। 1990 के दशक में उन्होंने जाने माने गणितज्ञ श्री पी.के. श्रीनिवासन के साथ काम किया है। वे ऋषिवैली स्कूल की मल्टीग्रेड लर्निंग प्रोग्राम टीम का हिस्सा भी रही हैं, जिसे 'स्कूल इन ए बाक्स' के नाम से जाना जाता है। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेन्टर, ऋषिवैली की संयुक्त पत्रिका At Right Angles (a resource for school mathematics) Volume 3, No.1 March 2014 में प्रकाशित Teaching multiplication (A visual Approach) का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : कविता तिवारी **सम्पादन** : राजेश उत्साही